АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СООРУЖЕНИЯ

В.С. Ганиев

ФГБОУ ВПО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет»

Математическое выражение для амплитудно-частотной характеристики в переходном режиме можно получить на основании решения дифференциального уравнения для системы с одной степенью свободы

$$y'' + 2ny' + \omega_0^2 y = h \sin \omega t \ , \qquad (1)$$

где y - перемещение, n - показатель затухания, ω_0 -частота собственных колебаний сооружения, ω - частота вынужденных колебаний, h - амплитуда приведённой внешней силы, t - время.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + 2ny' + \omega_0^2 y = 0 \ . \qquad (2)$$

Отметим, что решение существенно зависит от коэффициента затухания n. При малых n корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряжёнными.

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0 \ , \quad r = -n \pm i\sqrt{\omega_0^2 - n^2} = -n \pm i\Omega \ ,$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \ .$$

Решение уравнения (2) запишется

$$y = e^{-nt}\left(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t\right). \qquad (3)$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{-nt} \cos \Omega t \ , \quad y_2 = e^{-nt} \sin \Omega t \ . \qquad (4)$$

Решение уравнения (1) ищем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

$$y(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t) =$$

$$= C_1(t) e^{-nt} \cos \Omega t \ + \ C_2(t) e^{-nt} \sin \Omega t \ . \qquad (4.1)$$

Произвольные функции C_1(t), C_2(t) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0\ , \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t) = h\sin\omega t\ . \end{cases} \qquad (5)$$

Определяя $y_1'(t)$, $y_2'(t)$ из (4), подставляя в систему (5), получим

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-nt}\cos\Omega t + C_2'(t)e^{-nt}\sin\Omega t = 0\ , \\ C_1'\left[-ne^{-nt}\cos\Omega t - e^{-nt}\Omega\sin\Omega t\right] + \\ \quad C_2'\left[-ne^{-nt}\sin\Omega t + e^{-nt}\Omega\cos\Omega t\right] = h\sin\omega t \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\Omega t + C_2'(t)\sin\Omega t = 0\ , \\ C_1'\left[-n\cos\Omega t - \Omega\sin\Omega t\right] + \\ \quad C_2'\left[-n\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t\right] = e^{nt}h\sin\omega t \end{cases} . \qquad (6)$$

Определяем C_1' , C_2' по формулам Крамера

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ . \qquad (7)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t \\ -n\cos\Omega t - \Omega\sin\Omega t & -n\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t \end{vmatrix} = \Omega\ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\Omega t \\ e^{nt}h\sin\Omega t & -n\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t \end{vmatrix} = -he^{nt}\sin\omega t\sin\Omega t\ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\Omega t & 0 \\ -n\cos\Omega t - \Omega\sin\Omega t & e^{nt} h \sin\Omega t \end{vmatrix} = h e^{nt} \sin\omega t \cos\Omega t \ ,$$

$$\begin{cases} C_1' = -\dfrac{h}{\Omega} e^{nt} \sin\omega t \sin\Omega t \ , \\ C' = \dfrac{h}{\Omega} e^{nt} \sin\omega t \cos\Omega t \ . \end{cases} \tag{8}$$

При интегрировании предварительно преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму.

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{h}{2\Omega} e^{nt} \left(\cos\gamma t - \cos\delta t\right) , \\ C_2' = \dfrac{h}{2\Omega} e^{nt} \left(\sin\gamma t + \sin\delta t\right) , \end{cases} \tag{9}$$

$$\gamma = \frac{\omega + \Omega}{2} \ , \quad \delta = \frac{\omega - \Omega}{2} \ . \tag{10}$$

Из справочных материалов

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{1}{a^2 + n^2} e^{ax} \left(a \sin nx - n \cos nx\right) ,$$

$$\int e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{a^2 + n^2} e^{ax} \left(n \sin nx + a \cos nx\right) .$$

$$C_1(t) = \frac{h}{2\Omega} \cdot \frac{1}{n^2 + \gamma^2} \cdot e^{nt} (\gamma \sin\gamma t + n \cos\gamma t) -$$

$$- \frac{h}{2\Omega} \cdot \frac{1}{n^2 + \delta^2} \cdot e^{nt} (\delta \sin\delta t + n \cos\delta t) + k_1 \ , \tag{11.1}$$

$$C_2(t) = \frac{h}{2\Omega} \cdot \frac{1}{n^2 + \gamma^2} \cdot e^{nt} (m \sin\gamma t - \gamma \cos\gamma t) +$$

$$+\frac{h}{2\Omega}\cdot\frac{1}{n^2+\delta^2}\cdot e^{nt}(m\sin\delta t-\delta\cos\delta t)+k_2\ . \qquad (11.2)$$

(11.1) и (11.2) подставим в (4.1) .

$$y(t)=e^{-nt}(k_1\cos\Omega t+k_2\sin\Omega t)+ \qquad (12)$$

$$+\frac{h\cos\Omega t}{2\Omega}\left\{\frac{1}{n^2+\gamma^2}\left(\gamma\sin\gamma t+n\cos\gamma t\right)-\frac{1}{n^2+\delta^2}\left(\delta\sin\delta t+n\cos\delta t\right)\right\}+$$

$$+\frac{h\sin\Omega t}{2\Omega}\left\{\frac{1}{n^2+\gamma^2}\left(n\sin\gamma t-\gamma\cos\gamma t\right)+\frac{1}{n^2+\delta^2}\left(n\sin\delta t-\delta\cos\delta t\right)\right\}.$$

Получили общее решение уравнения (1) . Представляет интерес сравнение полученного решения с решениями, полученными другими методами: методом Бернулли , операционным методом.