ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Н.А. Куликова

ФГБОУ ВПО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет»

В статье в явном виде получено решение задачи с интегральными краевыми условиями для дифференциального уравнения с частными производными гиперболического типа в прямоугольной области.

Для уравнения

$$u_{xy} + \frac{\gamma}{x+y} u_x = (x+y)^{-\gamma}\, \omega(y), \quad \gamma \in R, \gamma \neq 0. \tag{1}$$

на множестве $H = \{(x,y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ дадим обоснование существования и единственности решения задачи в следующей постановке.

Задача N_1**.** Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\overline{H}})$;

2) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) на множестве H;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\alpha} u(x,y)dx = \varphi(y), \quad y \in [0,b], \quad 0 < \alpha \leq a, \tag{2}$$

$$\int_0^{\beta} u(x,y)dy = \psi(x), \quad x \in [0,a], \quad 0 < \beta \leq b. \tag{3}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Используем вид решения задачи Гурса для уравнения (1) на множестве H с краевыми условиями $u(0,y) = f(y)$, $y \in [0,b]$, $u(x,0) = g(x)$, $x \in [0,a]$ [1]. Если $f(y) \in C[0,b] \cap C^1(0,b)$, $g'(x) \in C(0,a) \cap L[0,a]$, $\omega(y) \in [0,b]$, $0 < \gamma < 1$, то решение имеет вид

$$u(x,y) = f(y) + \int_0^x g'(t) \cdot t^{\gamma} \cdot (t+y)^{-\gamma}\, dt + \frac{(x+y)^{1-\gamma} - y^{1-\gamma}}{1-\gamma} \int_0^y \omega(t)dt. \tag{4}$$

Учитывая условие (2), получаем

$$\varphi(y)=\alpha f(y)+\int_0^{\alpha}\int_0^{x} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot(t+y)^{-\gamma}\,dtdx+\int_0^{\alpha}\frac{(x+y)^{1-\gamma}-y^{1-\gamma}}{1-\gamma}dx\int_0^{y}\omega(s)ds=$$
$$=\alpha f(y)+C_1(y)+C_2(y).$$

Меняя порядки интегрирования во втором и третьем слагаемом, находим

$$C_1(y)=\int_0^{\alpha} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot(t+y)^{-\gamma}(\alpha-t)dt,$$

$$C_2(y)=\left[\frac{(\alpha+y)^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}-\frac{y^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}-\frac{\alpha y^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]\cdot\int_0^{y}\omega(s)ds.$$

Тогда

$$\varphi(y)=\alpha f(y)+\int_0^{\alpha} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot(t+y)^{-\gamma}(\alpha-t)dt+\frac{(\alpha+y)^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds-$$
$$-\frac{y^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds-\frac{\alpha y^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds.$$

Отсюда получаем

$$f(y)=\frac{\varphi(y)}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot(t+y)^{-\gamma}(\alpha-t)dt-\frac{(\alpha+y)^{2-\gamma}}{\alpha(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds+$$
$$+\frac{y^{2-\gamma}}{\alpha(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds+\frac{y^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}\int_0^{y}\omega(s)ds. \qquad (5)$$

Теперь потребуем, чтобы функция, определяемая формулой (4), удовлетворяла условию (3). Приходим к равенству

$$\psi(x)=\int_0^{\beta} f(y)dy+\int_0^{\beta}\int_0^{x} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot(t+y)^{-\gamma}\,dtdy+\int_0^{\beta}\frac{(x+y)^{1-\gamma}-y^{1-\gamma}}{1-\gamma}dy\int_0^{y}\omega(s)ds=$$
$$=\int_0^{\beta} f(y)dy+D_1(x)+D_2(x). \qquad (6)$$

Изменяя порядки интегрирования во втором и третьем слагаемом этой формулы и вычисляя внутренние интегралы, получаем

$$D_1(x)=\frac{1}{1-\gamma}\int_0^{x} g'(t)\cdot t^{\gamma}\cdot\left[(\beta+t)^{1-\gamma}-t^{1-\gamma}\right]dt,$$

$$D_2(x)=\frac{1}{(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{\beta}\omega(s)\left[(x+\beta)^{2-\gamma}-(x+s)^{2-\gamma}\right]ds-$$
$$-\frac{1}{(1-\gamma)(2-\gamma)}\int_0^{\beta}\omega(s)\left[\beta^{2-\gamma}-s^{2-\gamma}\right]ds.$$

Учитывая эти представления, продифференцируем обе части тождества (6) по *x*. Будем иметь

$$\psi'(x) = \frac{1}{1-\gamma} g'(x) \cdot x^{\gamma} \left[(x+\beta)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma} \right] + \frac{1}{1-\gamma} \int_0^{\beta} \omega(s) \left[(x+\beta)^{1-\gamma} - (x+s)^{1-\gamma} \right] ds.$$

Откуда находим

$$g'(x) = \frac{(1-\gamma)\cdot\psi'(x)\cdot x^{-\gamma}}{(x+\beta)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}} - \frac{x^{-\gamma}}{(x+\beta)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}} \int_0^{\beta} \omega(s) \left[(x+\beta)^{1-\gamma} - (x+s)^{1-\gamma} \right] ds. \quad (7)$$

Функции, определяемые формулами (5) и (7), подставим в выражение (4). После ряда несложных преобразований окончательно приходим к формуле

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{\varphi(y)}{\alpha} - \frac{1-\gamma}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{\varphi'(t)\cdot(t+y)^{-\gamma}(\alpha-t)}{(\beta+t)^{1-\gamma} - t^{1-\gamma}} dt - \frac{(\alpha+y)^{2-\gamma}}{\alpha(1-\gamma)(2-\gamma)} \int_0^{y} \omega(s) ds + \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{(t+y)^{-\gamma}(\alpha-t)}{(\beta+t)^{1-\gamma} - t^{1-\gamma}} dt \int_0^{\beta} \omega(s) \left[(\beta+t)^{1-\gamma} - (t+s)^{1-\gamma} \right] ds + \\ & + \frac{y^{2-\gamma}}{\alpha(1-\gamma)(2-\gamma)} \int_0^{y} \omega(s) ds + (1-\gamma) \int_0^{x} \frac{\psi'(t)\cdot(t+y)^{-\gamma}}{(\beta+t)^{1-\gamma} - t^{1-\gamma}} dt + \frac{(x+y)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} \int_0^{y} \omega(s) ds - \\ & - \int_0^{x} \frac{(t+y)^{-\gamma}}{(\beta+t)^{1-\gamma} - t^{1-\gamma}} dt \int_0^{\beta} \omega(s) \left[(\beta+t)^{1-\gamma} - (t+s)^{1-\gamma} \right] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\varphi(y) \in C[0,b]$, $\varphi'(y) \in C^{(1)}(0,b)$, $\psi(x) \in C[0,a]$, $\psi'(x) \in C(0,a) \cap L[0,a]$, $\omega(y) \in C[0,b]$, $0 < |\gamma| < 1$, *то единственное решение задачи* N_1**,** *непрерывное в* $\overline{H}$, *определяется формулой (8).*

Литература.

1. Куликова Н.А. Задачи Гурса для неоднородного дифференциального уравнения гиперболического типа //Математическая физика и нанотехнологии: материалы и доклады Международной методологической школы-конференции (Самара, 5 октября - 6 ноября 2009г.). – Сер. «Современные проблемы математической физики». – Спец. вып. №1. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2010. – С. 54-57.