О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ТИПА БЕЛЬТРАМИ В ПРОСРАНСТВЕ $L_p = L_p(E)$

А.В. Галамагин

Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина

В работе рассматривается сингулярная эллиптическая система типа Бельтрами с правой частью из пространства $L_p(E)$ $(1 < p < \infty)$. Для широкого класса коэффициентов получены достаточные условия компактности минимального оператора, порожденного системой, а также аппроксимативные свойства решений рассматриваемой системы. Настоящие результаты могут быть использованы в гидро- и газодинамике, теории аналитических функций, а также теории поверхностей и оболочек.

Работа посвящена изучению свойств решений сингулярной системы двух вещественных уравнений первого порядка, которая в комплексной записи имеет вид

$$L_\lambda \omega = \partial_{\bar{z}} \omega - q(z)\partial_z \omega + A(z)\omega + (B(z) + \lambda)\overline{\omega} = F(z), \ \lambda \geq 0 \qquad (1)$$

Под сингулярностью системы здесь понимается задание ее на некомпактной области, и то, что коэффициенты могут расти в близи бесконечно удаленной точки.

Когда $q(z) = \overline{q(z)}$, коэффициенты *A(z)* и *B(z)* непрерывны, отделены от нуля и могут иметь неограниченный рост на бесконечности, а *F(z)* принадлежит пространству $L_p = L_p(E)$, $p \in (1, \infty)$, система (1) с помощью метода Титчмарша впервые была исследована в работе [1]. В работе [2] метод работы [1] модернизирован и применен к системе уравнений типа Бельтрами (1) для комплекнозначной функции $q(z)$. В настоящей работе исследования начатые в работе [2] продолжены. В ней для широкого класса коэффициентов найдены условия компактности резольвенты оператора, порожденного системой (1), а также изучены аппроксимативные свойства решений, когда правая часть принадлежит пространству L_p, $p \in (2, \infty)$.

Функцию $\omega(z) \in L_p(E)$ назовем решением системы (1), если найдется последовательность $\{\omega_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(E)$, такая, что $\|\omega_n - \omega\|_p \to 0$, $\|L_\lambda \omega_n - F\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь $\|\cdot\|_p$ - норма в пространстве L_p.

Оператор L_λ, соответствующий системе (1), считаем определенным на множестве бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций

$C_0^\infty(E)$. Его замыкание по норме пространства $L_p = L_p(E), 1 < p < \infty$, также обозначим через L_λ.

Предположение 1. Пусть *q(z)* –непрерывно дифференцируема, *A(z), B(z)* – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$a)\, \varepsilon \operatorname{Re} B(z) - 2\Big(|A(z)| + |(\operatorname{Re} q(z))_x| + |(\operatorname{Im} q(z))_x| + |(\operatorname{Re} q(z))_y| +$$

$$+ |(\operatorname{Im}(z))_y|\Big) \ge \delta > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

$$б)\ |\operatorname{Re} q(z)| + |\operatorname{Im} q(z)| \le q_0 < 1;$$

$$в)\ \sup_{|z-t|\le 1} \max\left\{\left|\frac{B(z)}{B(t)}\right|, \frac{\operatorname{Re} B(z)}{\operatorname{Re} B(t)}\right\} \le K,\ K > 1;$$

$$г)\ |A(z) - A(t)| + |B(z) - B(t)| + |(\operatorname{Re} q(z))_x - (\operatorname{Re} q(t))_x| +$$

$$+ |(\operatorname{Re} q(z))_y - (\operatorname{Re} q(t))_y| + |(\operatorname{Im} q(z))_x - (\operatorname{Im} q(t))_x| +$$

$$+ |(\operatorname{Im} q(z))_y - (\operatorname{Im} q(t))_y| \le \Xi |B(t)|^\alpha \cdot |z - t|^\beta, \text{ где } t \in E,$$

$|z - t| \le 1, \beta \in (0,1], \alpha - \beta - 1 < 0$, $(\operatorname{Re} q(z))_x, (\operatorname{Re} q(z))_y$ - частные производные по x и по y функции $\operatorname{Re} q(z)$, а $(\operatorname{Im} q(z))_x, (\operatorname{Im} q(z))_y$ - частные производные по x и по y функции $\operatorname{Im} q(z)$.

Теорема 1. Пусть выполнены все условия предположения 1. Тогда найдется такое число $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda \ge \lambda_0$, решение $\omega(z)$ системы (1) существует для любой функции $F(z) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, и справедлива оценка

$$\|\partial_{\bar z}\omega\|_{L_p} + \|q(\cdot)\partial_z \omega\|_{L_p} + \|A(\cdot)\omega\|_{L_p} + \|(\lambda + B(\cdot))\overline{\omega}\|_{L_p} \le C\|F\|_{L_p}. \quad (2)$$

Доказательство теоремы 1 приводится в [2].

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\lim_{|z|\to\infty} |B(z)| = \infty. \quad (3)$$

Тогда оператор L_λ^{-1}, обратный к минимальному оператору L_λ, является вполне непрерывным в пространстве L_p.

Теорема 2 влечет дискретность спектра оператора L_λ^{-1} $(\lambda \ge \lambda_0)$ и дает возможность рассматривать задачу об оценке функции распределения поперечников по Колмогорову множества

$$M = \left\{\omega : \|\partial_{\bar z}\omega - q(\cdot)\partial_z \omega + A(\cdot)\omega + (B(\cdot) + \lambda)\overline{\omega}\|_{L_p} \le T\right\}.$$

Далее считаем, что $p \in (2, +\infty)$, а λ_0- постоянная из теоремы 1. Под поперечниками по Колмогорову множества M понимается

последовательность чисел

$$d_k = \inf_{\{G_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in G_k} \|u - v\|_X, \; k = 0,1,2,...,$$

где G_k-подпространство пространства L_p размерности k. Через $N_p(\gamma)$ обозначим количество поперечников d_k, больших заданного числа $\gamma > 0$, т.е. $N_p(\gamma) = \sum_{\{k: d_k > \gamma\}} 1$.

Оценки функции $N_p(\gamma)$, которая называется функцией распределения поперечников по Колмогорову множества M, позволяют получить более тонкие, чем компактность свойства резольвенты L_λ^{-1} (если последняя существует). Справедлива

Теорема 4. Если для функций $q(z)$, $A(z)$ и $B(z)$ выполнены все условия теоремы 3, то справедливы оценки

$$C_1 \gamma^{-2} \mu\left(z : |B(z)| \le C_0^{-1} \gamma^{-1}\right) \le N_p(\gamma) \le C_2 \gamma^{-2} \mu\left(z : |B(z)| \le C_0 \gamma^{-1}\right), \quad (4)$$

где μ - мера Лебега на E.

Оценки в правой и левой частях в (4) относительно γ имеют один порядок. Это говорит о том, что функция $N_p(\gamma)$ имеет слабую асимптотику. Помимо этого выражения в правой и левой частях оценки не зависят от p. Это есть следствие используемого метода.

Литература

1. Галамагин А.В., Оспанов К.Н. О свойствах решения обобщенной системы типа Бельтрами в пространствах L_p// Вестник Карагандинского Университета. Серия МАТЕМАТИКА, 2005, №3(39). - С. 11-17.

2. Оспанов К.Н., Галамагин А.В. О коэрцитивной разрешимости системы типа Бельтрами// Вестник. Павлодар: Научный журнал ПГУ им. С.Торайгырова, Физико-математическая серия, 2009. -№3. – С.72-83.

3. Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. - М.: Наука, 1988.-286 с.