О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Галамагин

Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина

В работе рассмотрена вырождающаяся эллиптическая система типа Бельтрами с правой частью из пространства $L_2(R^2, R^2)$. Для широкого класса коэффициентов получены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой системы. Настоящие результаты могут быть использованы в гидро- и газодинамике, теории аналитических функций, а также теории поверхностей и оболочек.

В работе рассматривается система

$$\ell U = B_c U + G(x,y)U = F(x,y),\ (x,y)\in R^2, \tag{1}$$

где

$$B_c = \begin{pmatrix} c(x,y) & 0 \\ 0 & c(x,y) \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y},\ c(x,y)\ge 0,\ U=(u,v),$$

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{pmatrix}, F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)).$$

Здесь $c(x,y)\ (c(x,y)\ge 0)$ - непрерывно дифференцируема, $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$ $(i, j = 1,2)$ - непрерывны, а $f(x,y)$ и $g(x,y)$ принадлежат пространству $L_2(R^2)$.

Если положить $\omega = u + iv$ систему (1) в комплексной форме можно переписать так

$$\ell\omega = \partial_{\bar z}\omega - q\partial_z\omega + A\omega + B\overline{\omega} = \Phi, \tag{2}$$

где функции $q(x,y)$, A, B и Φ выглядят следующим образом:

$$q = \frac{1-c(x,y)}{1+c(x,y)},\ A = \frac{a_{11}+a_{22}+i(a_{21}-a_{12})}{2(1+c(x,y))},$$

$$B = \frac{a_{11}-a_{22}+i(a_{21}+a_{12})}{2(1+c(x,y))},\ \Phi = \frac{f(x,y)+ig(x,y)}{2(1+c(x,y))}.$$

Эта система носит название система типа Бельтрами. Простейшей из рассматриваемого класса систем является система Коши-Римана (когда $q\equiv 0, A\equiv 0, B\equiv 0$ и $\Phi\equiv 0$). Эта система впервые исследовалась Л.Эйлером в

1755 году в связи с задачами гидродинамики и картографии. В гидродинамике решение этой системы описывает потенциал плоскопараллельного установившегося течения жидкости. Более сложные режимы движения жидкости описываются различными обобщениями системы Коши – Римана, в том числе и нелинейными в случае, когда коэффициенты системы зависят от решения.

Если функция $c(x,y)$ ограничена и $c(x,y)\geq\sigma>0$, то из представления функции q видно, что она оказывается отделенной от единицы и система (1) будет эллиптической. Однако, когда $c(x,y)\geq 0$, либо $c(x,y)\geq\sigma>0$, но

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} c(x,y)=+\infty,$$

условие $|q|\leq q(\sigma)<1$ нарушается, т.е. функция q в (2) может оказаться не отделенной от единицы. Это показывает, что в последнем случае система (1) вырождается из эллиптической в параболическую.

Под решением системы (1) будем понимать функцию $U(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$, принадлежащую пространству $L_2=L_2\left(R^2,R^2\right)$, для которой найдется последовательность $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_0^{\infty}\left(R^2,R^2\right)$, такая, что $\|U_n-U\|_{L_2}\to 0$, $\|\ell U_n-F\|_{L_2}\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема. Пусть $c(x,y)\ (c(x,y)\geq 0)$ непрерывно дифференцируема, а $a_{ij}\ (i,j=1,2)$ непрерывны и удовлетворяют условиям

$$а)\ \mu_1\left(a_{11}(x,y)-\left|\frac{\partial c(x,y)}{\partial x}\right|\right)u^2-\left(|a_{12}(x,y)|+|a_{21}(x,y)|\right)uv-$$

$$-\mu_2\left(a_{22}(x,y)+\left|\frac{\partial c(x,y)}{\partial x}\right|\right)v^2\geq\delta^2(x,y)\left(u^2+v^2\right),\ \delta(x,y)\geq\delta_0>0,$$

$0<\mu_1,\mu_2<1$;

$$б)\ \left(|a_{11}(x,y)|+|a_{21}(x,y)|\right)|u|+\left(|a_{12}(x,y)|+|a_{22}(x,y)|\right)|v|\leq C_1|G(x,y)U|$$

$$в)\ \frac{\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}(x,y)|}{\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}(x,\tau)|}\leq C_2<\infty\quad (j=1,2)\ \text{ при }\ y,\tau\in R:\ |y-\tau|\leq\frac{1}{2};$$

$$г)\ \frac{\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}(x,y)-a_{ij}(t,y)|}{\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}(t,y)|}\leq c_2<\infty\ (j=1,2,\ldots),\ \text{при}\ |x-t|\leq\frac{1}{2}.$$

Тогда оператор ℓ имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве L_2 и для каждой функции $U(x,y) \in D(\ell)$ справедлива оценка

$$\left\| c(x,y)u_x - v_y \right\|_{L_2}^2 + \left\| u_y + c(x,y)v_x \right\|_{L_2}^2 + \int_{R^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \left| a_{i1}(x,y) \right|^2 \right) u^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{2} \left| a_{i2}(x,y) \right|^2 \right) v^2 \right] dxdy \le C \left\| \ell U \right\|_{L_2}^2 .$$

Условие *а)* теоремы в случае $a_{12} = a_{21}$ есть условие положительной определенности матрицы $G(x,y)$, а условие *б)* есть условие коэрцитивности элементов матрицы $G(x,y)$. Условия *в), г)* означают, что функции $a_{ij}(x,y),\ (i,\ j = 1,2)$ являются не сильно колеблющимися функциями по одной переменной и удовлетворяют неравенству типа Титчмарша по другой переменной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Оспанов К.Н. О вырождающейся системе уравнений типа Бельтрами// Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. -1997, №3. -С.41-46.

2. Галамагин А.В. Оспанов К.Н. О гладкости одной вырожденной системы в весовом банаховом пространстве// Материалы 5 международной научной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры:», -Актобе, 2009г. С. 189-191.