О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПОТЕНЦИАЛА ВЕБЕРА

А.Ш. Надырбекова

Таразский государственный педагогический институт, Казахстан

Данная работа посвящена построению алгоритма решения двумерной обратной задачи потенциала Вебера, которые являются математической моделью многих задач дистанционной оптики, фотометрии и других областей физической оптики. Рассматриваемые в работе обратные задачи относятся к некорректно поставленным задачам. Основываясь на известных результатах теории обратной задачи потенциала Вебера и теории некорректных задач, с использованием метода регуляризации дробного порядка гладкости построены приближенные решения двумерной обратной задачи потенциала Вебера, получены оценки полной погрешности полученных приближенных решений.

Рассмотрим двумерный потенциал Вебера

$$A\mu \equiv \int_D \mu(y)\frac{1}{|x-y|}dy = w(x), \qquad (1)$$

где $y=(y_1,y_2)\in D,\ x=(x_1,x_2)\in D_1,\ D\cap D_1=\varnothing,$ а область D любая ограниченная из R^2 с гладкой границей.

Исследуется обратная задача об определении плотности $\mu(y_1,y_2)$, если известно значение потенциала Вебера.

Потенциал Вебера («обратных квадратов расстояний») был первым в физической науке нового времени экспериментально открытым потенциалом. И. Кеплер потом Вебер в серии оптических экспериментов установили и опубликовали свои «закон обратных квадратов расстояний» для интенсивности света от точечного источника. Позднее этот потенциал, задолго до введения в математическую физику Лапласом Ньютоновского потенциала, успешно использовался П. Бугер, и затем И. Ламбертом в теоретической и практической фотометрии, в частности, для объяснения характера свечения лунного диски.

Математический аппарат для построения развитой теории потенциала с ядром - $\frac{1}{r^2}$ был разработан в 60–70-х годах прошлого века в рамках теории хантовских потенциалов, а обратные задачи впервые были исследованы (1983г.) В.Р. Кирейтовым. Наибольший интерес и трудности представляет случай, когда область задания значений потенциала Вебера и область локализации искомых источников не пересекаются. Известно, что если потенциальный оператор обратим, тогда обратную задачу потенциала Вебера можно сформулировать и как задачу определения правой части интегро-дифференциального уравнения из класса искомых распределений по заданному следу решения этого уравнения на котором подмножестве. Однако, когда область задания значений потенциала и область локализации искомых источников не пересекаются, интегральный оператор является вполне непрерывными, следовательно рассматриваемая обратная задача относиться к типу некорректных задач. Поэтому центральное место при исследовании обратных задач потенциала Вебера являются теоремы единственности, условно - устойчивости решении и построение приближенного решения. 1992 годах в классе непрерывных функции были доказана теоремы единственности, а на множестве корректности получены логарифмическая оценка [1], а вопрос построение приближенного решения был открыто.

В настоящей работе рассматривается вопрос о равномерном приближении точного решения уравнения (1) по методу регуляризации дробного порядка. В качестве приближения к точному решению в методе регуляризации дробного порядка берется $\mu_{\alpha\delta}$, доставляющий минимум сглаживающему функционалу:

$$M^{\alpha}[\mu, w_{\delta}] = \|A\mu - w_{\delta}\|^2 + \alpha\Omega[\mu],$$

где стабилизирующий функционал $\Omega[\mu] = \|\mu\|^2 + \|\partial^{1/2}\mu\|^2 > 0$, $\alpha > 0$ - параметр регуляризации, $\partial^{1/2}$ - оператор дифференцирования порядка $1/2$. Регуляризация дробного порядка обеспечивает принадлежность приближенных решении множеству корректности M из пространства непрерывных функции $C(D)$.

Применяя метод регуляризации дробного порядка, интегральное уравнение первого рода сводится к регуляризованному уравнению второго рода, которое заменяется системой разностных уравнений.

В работе используются следующие символики:

μ - решение исходного (интегрального) уравнения первого рода (1) с точной правой частью w;

μ_{δ} - решение исходного уравнения с неточной правой частью w_{δ}: $\|w - w_{\delta}\| \le \delta$, δ - малая величина;

μ_{α} - решение регуляризованного (интегро-дифференциального) уравнения второго рода без погрешности ($\delta = 0$);

$\mu_{\alpha\delta}$ - решение того же уравнения с правой частью w_{δ};

μ_h - решение разностной задачи – системы линейных алгебраических уравнений.

Путем последовательных оценок уклонении между соседними парами решении в определенных метриках, составляется полная погрешность решении, полученных с помощью метода регуляризации с названными стабилизаторами и она имеет вид

$\|\mu-\mu_{\alpha\delta}\|\le\omega(\delta)$, причем $\omega(\delta)\to 0$, когда $\delta\to 0$.

Таким образом, доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. Если при данной правой части $w(x)$ уравнение разрешимо, то $\|\mu_\alpha-\mu\|\to 0$, при $\alpha\to 0$ и справедливо $\|\mu_\alpha-\mu\|_{L_2}\le\dfrac{C_6\alpha}{K_2^2-\alpha}$, где $C_6=\|\mu\|_{W_2^1}\equiv\|\mu\|_2$, $K_2=\max\limits_{x\in D_1,y\in D}\left|\dfrac{1}{|x-y|}\right|<\infty$.

Лемма 2. Если $\mu_{\alpha\delta}$ - решения регуляризованного уравнения, тогда справедлива оценка $\|\mu_{\alpha\delta}-\mu_\delta\|_{L_2}\le\dfrac{2C_6\delta}{(C_6K_2-\delta)}$, где μ_δ- решение уравнения $A\mu_\delta=w_\delta$.

Лемма 3. Если $\mu_{\alpha\delta}$ - решение регуляризованного уравнения $A^*A\mu_{\alpha\delta}+\alpha(\mu_{\alpha\delta}+\nabla\mu_{\alpha\delta})=A^*w_\delta$, является приближенным решением исходного уравнения (1), тогда справедлива оценка $\|\mu_{\alpha\delta}-\mu\|_{L_2}\le\dfrac{2C_6\delta}{(C_6K_2-\delta)}+\varepsilon_1(\delta)$, при этом оптимальный параметр $\alpha_{on}=\dfrac{K_2\delta}{C_6}$, функция $\varepsilon_1(\delta)$ - характеризующая устойчивость решения от малой погрешности правой части стремится к нулю при $\delta\to 0$.

Теорема 2.4. Если точное решение (1) $\mu(y_1,y_2)\in M$, тогда при $\delta\to 0$ решение регуляризирующего уравнения $A^*A\mu_{\alpha\delta}+\alpha(\mu_{\alpha\delta}+\nabla\mu_{\alpha\delta})=A^*w_\delta$ на множестве корректности стремится к точному решению и справедливо неравенство

$\|\mu_{\alpha\delta}-\mu\|_C\le\tilde{C}\varphi_5(\delta)+\varepsilon_1(\delta)$, где $\varphi_5(\delta)=\dfrac{2C_6\delta}{(C_6K_2-\delta)}$, $\varepsilon_1(\delta)$ - характеризующая устойчивость решения от малой погрешности правой части стремится к нулю при $\delta\to 0$, $K_2=\max\limits_{x\in D_1,y\in D}\left|\dfrac{1}{|x-y|}\right|<\infty$, $C_6=\|\mu\|_{W_2^1}\equiv\|\mu\|_2$, $M=\left\{\mu\in C(D)\,\big/\,|grad\ \mu|<C\right\}$.

Литература

1 Серикбаев А.У. Об устойчивости решений обратной задачи потенциала Вебера. //Известия АН РК Серия физ.мат. - 1992, №5. - 41-44с.