ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕЛИЧИНЫ ДВУГРАННОГО УГЛА

Хан Д.И., Тлеубергенова М.А.

Актюбинский государственный педагогический институт

Annotation to the article to the question of calculating of the size (magnitude) of the dihedral angle. One of the ways of calculation the size of the dihedral angle with the help of vector in some chosen rectangular system of coordinates is considered.

В [1] содержатся задачи на все разделы элементарной геометрии, которые сыграли большую роль в подготовке будущих учителей математики. Большое место в этой книге отведено позиционным и метрическим задачам на проекционном чертеже. Рассмотрены примеры решения метрических задач поэтапно-вычислительным, геометрическим и векторно-координатным способами. При этом, естественно, используются все действия над векторами, включая скалярное произведение векторов в координатах. Из аналитической геометрии используется уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

Остановимся на вычислении двугранного угла. Вычисление угла между нормальными векторами граней двугранного угла не дает возможности определить острый он или тупой. В связи с этим можно использовать другой способ нахождения величины двугранного угла. Найдем векторы, параллельные граням и перпендикулярные ребру этого угла, тогда угол между этими векторами равен величине двугранного угла. При этом надо правильно выбрать направление векторов: оба они должны быть направлены от ребра (или обратно). Рассмотрим этот прием на примере решения конкретной задачи.

Задача. В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD(AB//CD)$ с отношением сторон $AB:BC:CD:AD=2:1:1:1.$ Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и $SA=AD$. Найти двугранные углы при следующих боковых ребрах пирамиды: а) SB; б) SC; в) SD.

а) Необходимо найти двугранный угол $ASBC$ (рис.1). Опустим перпендикуляр, $AH\perp SB$, тогда $\Delta ASB: AS=AD=1,\ \frac{SH}{HB}=\frac{AS^2}{AB^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{1}{5}$, $\frac{HB}{SB}=\frac{4}{5}.$ Проведем $HH_1//AS\Rightarrow HH_1\perp AB$ и найдем $\frac{AH_1}{AB}=\frac{SH}{SB}=\frac{1}{5}\Rightarrow AH_1=\frac{2}{5}.$

Из подобия $\Delta SAB\sim\Delta HH_1B:\frac{HH_1}{SA}=\frac{BH}{SB}=\frac{4}{5}\Rightarrow HH_1=\frac{4}{5}$. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, где $Ox=AE$ $(AE\perp AB)$, $Oy=AB, Oz=AS$.

Найдем следующие отрезки:

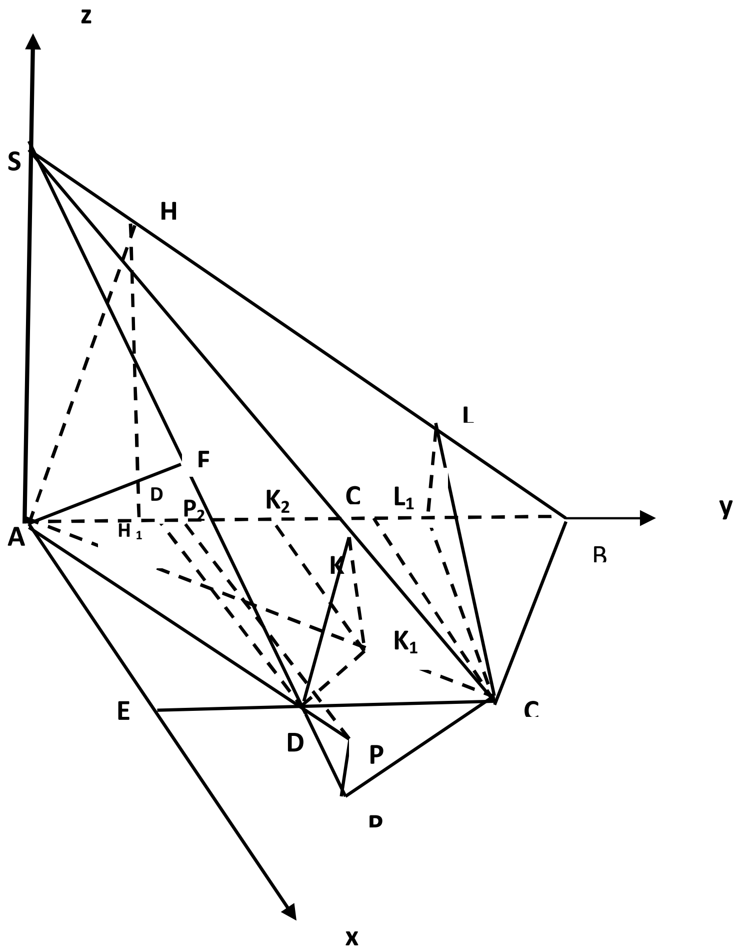

Рис. 1

$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, высота трапеции равна $AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $CE=\dfrac{3}{2}$, поэтому $AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$, $SC=\sqrt{AS^2+AC^2}=\sqrt{1+3}=2.$ В треугольнике $SCB: SC^2+BC^2=4+1=SB^2$, поэтому $\angle SCB=90^0$. Найдем теперь координаты точки H и вектора $\overline{AH}$ в выбранной системе координат: $H\left(0,\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right), \overline{AH}\left(0,\dfrac{2}{4},\dfrac{4}{5}\right) // \overline{a}(0,1,2)$.

В треугольнике SCB опустим перпендикуляр $CL\perp SB\Rightarrow \dfrac{SL}{LB}=\dfrac{SC^2}{BC^2}=\dfrac{4}{1}\Rightarrow \dfrac{SL}{SB}=\dfrac{4}{5},\dfrac{LB}{SB}=\dfrac{1}{5}$. Тогда $\dfrac{LL_1}{SA}=\dfrac{1}{5}(LL_1 // SA)\Rightarrow LL_1=\dfrac{1}{5},\dfrac{AL_1}{AB}=\dfrac{SL}{SB}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow AL_1=\dfrac{8}{5}$ и $L\left(0,\dfrac{8}{5},\dfrac{1}{5}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$, откуда $\overline{CL}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{5}\right) // \overline{b}(-5\sqrt{3},1,2)$. Векторы $\overline{AH}$ и $\overline{CL}$ перпендикулярны ребру SB и параллельны граням двугранного угла, поэтому искомый угол φ найдем из равенства $cos\varphi = \cos\left(\overline{AH}, ^\wedge \overline{CL}\right) = \cos\left(\overline{a}, ^\wedge \overline{b}\right) = \frac{1+4}{\sqrt{5}\sqrt{75+1+4}} - \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{4}$.

б) Найдем двугранный угол $BSCD$. В $\Delta SCD: SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $SC = 2, DC = 1.$ Опустим перпендикуляр $DK \perp SC$, тогда $DK^2 = SD^2 - SK^2 = DC^2 - (SC - SK)^2 \Rightarrow 2 = 1 - 4 + 4SK \Rightarrow SK = \frac{5}{4}$, $CK = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{SK}{SC} = \frac{5}{8}$, $\frac{KC}{SC} = \frac{3}{8}$.

Опустим перпендикуляры $KK_1 \perp AC$ и $K_1K_2 \perp AB$, тогда $\frac{KK_1}{SA} = \frac{KC}{SC} = \frac{3}{8}$, пусть $CC_1 \perp AB \Rightarrow \frac{AK_2}{AC_1} = \frac{AK_1}{AC} = \frac{SK}{SC} = \frac{5}{8}$; $\frac{K_1K_2}{CC_1} = \frac{AK_1}{AC} = \frac{5}{8}$, $AK_2 = \frac{5}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$, $K_1K_2 = \frac{5}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{16}$, откуда получаем $K\left(\frac{5\sqrt{3}}{16}, \frac{15}{16}, \frac{3}{8}\right)$. Найдем точку $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и вектор $\overline{DK}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{7}{16}, \frac{3}{8}\right) // \overline{a}\left(-3\sqrt{3}, 7, 6\right)$. Поскольку $B(0,2,0)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ и $\overline{BC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \perp SC(см.п.а))$, то искомый угол φ найдем из равенства

$$cos\varphi = \cos\left(\overline{DK}, ^\wedge \overline{BC}\right) = \cos\left(\overline{a}, ^\wedge \overline{b}\right) = \frac{-\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{\sqrt{27+49+36} \times \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{-2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \quad \varphi = arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

в) Найдем двугранный угол $ASDC$. Так как $SD^2 + CD^2 = 2 + 1 \langle\ 2^2 = SC^2$, то $\angle SDC \rangle\ 90^0$, поэтому основание P перпендикуляра $CP \perp SD$ лежит вне отрезка SD. Из подобия $\Delta SKD \sim \Delta SPC: \frac{SP}{SK} = \frac{SC}{SD} \Rightarrow SP = \frac{SK \times SC}{SD} = \frac{5 \times 2}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, $\frac{SD}{SP} = \frac{\sqrt{2} \times 4}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{DP}{SD} = \frac{1}{4}$. Проведем $PP_1 // SA,$ $P_1P_2 // DD_2 // AE$ и найдем $\frac{P_1P_2}{DD_2} = \frac{AP_1}{AD} = \frac{SP}{SD} = \frac{5}{4} \Rightarrow P_1P_2 = \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$ (так как $DD_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$) , $\frac{AP_2}{AD_2} = \frac{P_1P_2}{DD_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow AP_2 = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ (так как $AD_2 = \frac{1}{2}$) , так как $PP_1 = \frac{1}{4}$, то $P\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \overline{CP}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{1}{4}\right) // \overline{b}\left(\sqrt{3}, -7, -2\right)$. Проведем $AF \perp SD$ (F- середина SD) , откуда $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AS} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}\overline{(0,0,1)} \Rightarrow \quad \overline{AF}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) // \overline{a}\left(\sqrt{3}, 1, 2\right)$. Искомый угол φ найдем из равенства

$\varphi = \cos\left(\overline{AF}, \hat{}\ \overline{CP}\right) = \cos\left(\bar{a}, \hat{}\ \bar{b}\right) = \frac{3-7-4}{\sqrt{3+1+4}\sqrt{3+49+4}} = -\frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$ Ответ: а) $\arccos\frac{1}{4}$; б) $\arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$; в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$.

Литература

1. Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М., Просвещение,1992.

2. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений. М., Просвещение,1991.